

## Examen - Analyse numérique

---

**La clarté et la rédaction entreront pour une part importante dans la notation.**  
**Les documents, calculatrices et téléphones sont interdits.**  
**Durée : 3h.**

---

**Question de cours.** Énoncer et démontrer le théorème de factorisation  $LU$  (sans matrice de permutation).

**Exercice 1.** Soit  $A$  la matrice

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & \gamma \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & \delta & \alpha \end{bmatrix},$$

où  $\alpha, \beta, \gamma$  sont des paramètres réels tels que  $\alpha \neq 0$ .

1. Écrire la matrice d'itération de Jacobi  $J$  associée à la matrice  $A$ .
2. Calculer la rayon spectral de  $J$ .
3. Donner une condition nécessaire et suffisante sur  $\alpha, \beta, \gamma$  et  $\delta$  pour que la méthode de Jacobi converge.

**Exercice 2.** Soit  $A$  une matrice carrée de taille  $n \geq 1$  à coefficients complexes et considérons la décomposition

$$A = M - N, \quad \text{où} \quad M = \frac{1}{\gamma} I, \quad N = \frac{1}{\gamma} I - A, \quad \gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

et  $I$  désigne la matrice identité de taille  $n$ . Dans le but de résoudre numériquement le système  $Ax = b$  où  $b \in \mathbb{R}^n$  est donné, on considère la méthode itérative associée à cette décomposition :

$$x_{k+1} = M^{-1}Nx_k + M^{-1}b, \quad x_0 \in \mathbb{R}^n.$$

1. Montrer que cette méthode converge si et seulement si pour toute valeur propre  $\lambda$  de  $A$ , on a  $|1 - \gamma\lambda| < 1$ .
2. Montrer que si  $A$  est symétrique définie positive alors il existe  $\gamma_0 > 0$  tel que pour tout  $\gamma \in ]0, \gamma_0[$  la méthode converge.

**Exercice 3.** Soit le système linéaire  $Mx = b$  avec

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

1. Montrer que le système  $Mx = b$  n'a pas de solution.
2. Afin de trouver une solution au sens des moindres carrés, écrire l'équation normale du système et déterminer sa solution.
3. Par la méthode de votre choix, calculer une décomposition en valeurs singulières de  $M$ .

4. En déduire l'inverse généralisé de  $M$  noté  $M^\dagger$ .
5. Calculer  $M^\dagger b$  et comparer avec le résultat de la question 2.

**Exercice 4.** En utilisant les méthodes de point fixe et de Newton, on souhaite résoudre l'équation non linéaire

$$f(x) = 0, \quad \text{avec} \quad f(x) = x - \frac{1}{5} \sin x - \frac{1}{2}.$$

1. En étudiant les variations de  $f$ , montrer que l'équation  $f(x) = 0$  a une unique solution que l'on notera  $\bar{x}$ .

**Méthode de point fixe.** Soit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite d'éléments de  $\mathbb{R}$  définie par

$$\begin{cases} x_{n+1} = \phi(x_n), \\ x_0 = \alpha \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad \text{avec} \quad \phi(x) = \frac{1}{5} \sin x + \frac{1}{2}.$$

2. Montrer que  $\phi$  est contractante de rapport  $1/5$ .
3. En déduire que pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ , la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\bar{x}$ .
4. Montrer que l'on a la vitesse de convergence : pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$|x_n - \bar{x}| \leq \frac{1}{5^n} |x_0 - \bar{x}|.$$

**Méthode de Newton.** Soit  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n - \frac{f(y_n)}{f'(y_n)}, \\ y_0 = \beta \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

5. Montrer que la suite  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bien définie pour tout  $\beta \in \mathbb{R}$ .
6. Donner une condition suffisante pour que cette méthode de Newton converge.
7. Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$|y_{n+1} - \bar{x}| \leq \frac{1}{8} |y_n - \bar{x}|^2$$

en détaillant la démonstration. On pourra exprimer  $f(\bar{x})$  par un développement de Taylor au voisinage de  $y_n$ .

8. En comparant l'inégalité précédente avec celle trouvée à la question 4, dire quelle est la méthode la plus efficace en terme de vitesse de convergence.